

4.5.8 Pravděpodobnost I

Předpoklady: 040503

Dodatek: Označení panna pochází z korunových mincí ČSSR, na jejichž líci byla ženská postava sázející lipovou ratolest. Na rubové straně mincí bývá státní znak, orel je památkou na rakousko-uherské orlice.

Pedagogická poznámka: Všichni žáci provedou dvacet hodů. Ukážeme si mé výsledky z učebnice (pokud házím, stejně začínám s hodnotami z učebnice a své použiji později), po vyřešení příkladu 2 otevřu excelovskou tabulku, postupně do ní přidáváme žákovské výsledky a sledujeme, jak se pravděpodobnost mění. Ukázalo se, že někteří žáci mají problémy i s hodem mincí, proto je lepší jeden hod ukázat a připomenout, že mince by se ve vzduchu měla točit.

Hod mincí

Jeden z nejznámějších způsobů, jak náhodně rozhodnout mezi dvěma možnostmi. Provedení hodu není příliš důležité, pokud se mince během letu točí, je jasné, že po dopadu (nebo po chycení rukou) bude vidět jedna z jejích stran.

Jaká je pravděpodobnost, že padne líc? Protože se hod mincí používá při losování a předpokládáme, že jde o spravedlivý postup $\Rightarrow$ pravděpodobnosti obou výsledků jsou stejné a tedy 50%.

Co vlastně znamená, že pravděpodobnost padnutí líce je 50 %?

Př. 1: Proveď třikrát 20 hodů mincí. U každého hodu zaznamenej výsledek. Kolikrát padl během dvaceti hodů rub a kolikrát líc? Napiš počet padlých líců na tabuli. Urči relativní četnost padnutí líce a relativní četnost padnutí rubu.

Výsledky:

hod	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
výsledek	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0

Uskutečnili jsme 20 hodů, padl 12x líc a 8x rub.

Relativní četnost líce: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$.

Relativní četnost rubu: $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$.

Znamená předchozí výsledek, že líc padá s větší pravděpodobností než rub?

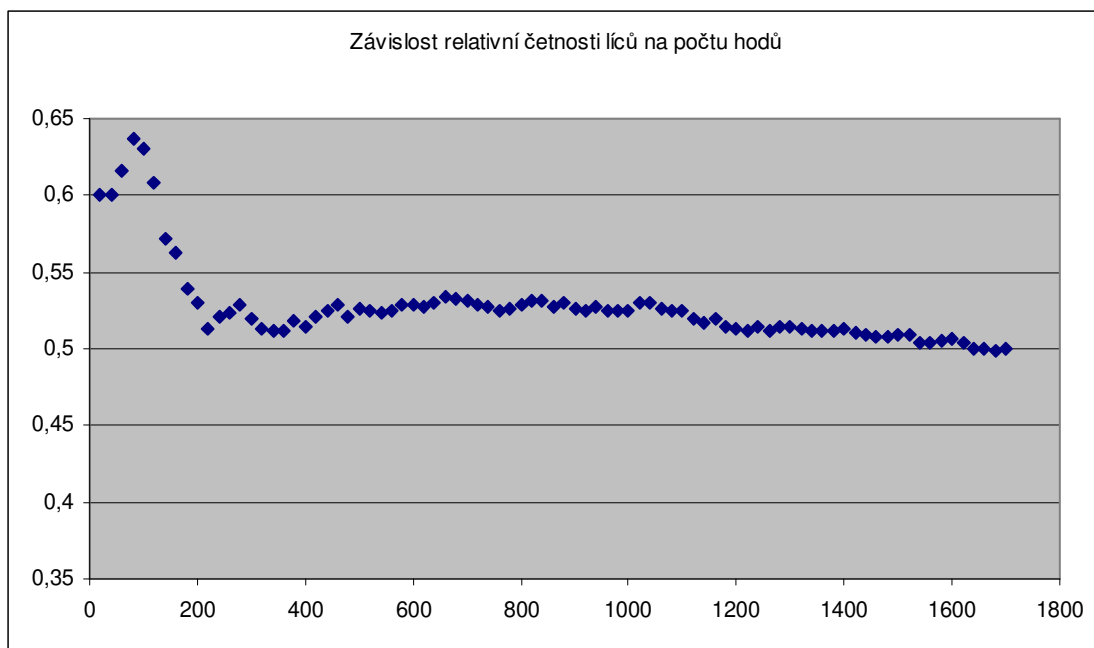
Kde je předpokládaná 50 % pravděpodobnost obou stran?

Př. 2: Proveď dalších 20 hodů mincí. Sleduj pouze četnosti líce. Napiš počty padlých líců na tabuli.

Prvních 20 hodů: 9 líců, 11 rubů.

Druhých 20 hodů: 13 líců, 7 rubů.

Zkusíme přidat další pokusy.



Z grafu je vidět, že se relativní četnost líců mění, občas dosáhne hodnoty 0,5, pak se zase změní, ale s větším počtem pokusů se odchylky od hodnoty 0,5 v průměru neustále zmenšují.
 ⇒ **Zákon velkých čísel: Při velkém počtu pokusů se relativní četnost blíží teoretické hodnotě pravděpodobnosti.**

Pedagogická poznámka: V hodině řešíme situaci tak, že dvacet hodů si provede každý student sám hned na začátku hodiny během zapisování do třídnice. Ihned po hodech zjistíme, že četnosti jsou pokaždé jiné. Poté doplníme četnosti do připraveného excelovského souboru, který ihned vypočítá relativní četnosti a kreslí graf.

Zkušenost: Při velkém počtu hodů jsou relativní četnosti líců i rubů přibližně stejné.
 Teorie: Oba výsledky hodu jsou stejně možné (stejně pravděpodobné).

⇒ Pravděpodobnost padnutí líce (i pravděpodobnost padnutí rubu) je $\frac{1}{2}$.

Př. 3: Rozhodni, která z následujících tvrzení o hodu mincí jsou pravdivá.

- Rub i líc padají se stejnou pravděpodobností.
- Z dvaceti hodů padne desetkrát líc.
- Pokud padl zrovna rub, příště padne líc.
- Když hodíme dvakrát, padne jednou rub a jednou líc.
- Když hodíme víckrát, bude relativní četnost blíže k $\frac{1}{2}$.
- Při velkém počtu pokusů se relativní četnost líce (rubu) bude blížit $\frac{1}{2}$.

a) Rub i líc padají se stejnou pravděpodobností.

Pravdivé tvrzení, protože pravděpodobnosti obou možností jsou 0,5.

b) Z dvaceti hodů padne desetkrát líc

Nepravdivé. Většina pokusů s 20 hody končí s jiným počtem padnutých líců.

c) Pokud padl zrovna rub, příště padne líc.

Nepravdivé. Mnohokrát se stalo, že se padlé strany nevystřídaly.

d) Když hodíme dvakrát, padne jednou rub a jednou líc.

Nepravdivé. Dvojice výsledků po sobě obsahují i dvojice stejných výsledků.

e) Když hodíme víckrát, bude relativní četnost blíže k $\frac{1}{2}$.

Nepravdivé. Relativní četnosti se sice s počtem hodů v průměru více přibližují hodnotě 0,5, ale nesměřují tam pořád, občas se hodnoty relativní četnosti od hodnoty 0,5 vzdalují.

f) Při velkém počtu pokusů se relativní četnost líce (rubu) bude blížit $\frac{1}{2}$.

Pravdivé.

Celkové shrnutí: Pravděpodobnost neumožňuje předpovídat s jistotou výsledek žádného konkrétního hodu, poskytuje nám pouze informaci o typických poměrech výsledků většího množství pokusů.

Př. 4: Chceme provést šest hodů mincí. Který z následujících výsledků těchto šesti hodů nejpravděpodobnější? Který je nejméně pravděpodobný? (Pořadí písmen v zápisu výsledku udává, při kterém hodu padl který výsledek).

a) LRRLRL

b) LLLRRR

c) RRRRRR

Všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné. Výsledek předchozího hodu nijak neovlivňuje pravděpodobnosti výsledků následujícího hodu. U každého z výsledků tak potřebujeme, aby každý ze šesti hodů dopadl přesně tak je předepsáno ve výsledku.

Př. 5: Urči pravděpodobnost, že u hrací kostky padne 6.

Hrací kostka: 6 možností, všechny stejně pravděpodobné $\Rightarrow$ pravděpodobnost, že padne jeden konkrétní výsledek, je $\frac{1}{6}$.

Př. 6: Urči pravděpodobnost sejmutí esa při snímání mariášových karet.

Karty obsahují osm různých hodnot, všechny se vyskytují ve stejném počtu $\Rightarrow$ všechny mohou být sejmuty se stejnou pravděpodobností $\Rightarrow$ pravděpodobnost sejmutí esa je $\frac{1}{8}$.

Př. 7: Ve velké počítačové firmě během jednoho roku selhalo z 22 400 harddisků 739. Jaká je pravděpodobnost selhání disku?

Relativní četnost poruchy: $\frac{739}{22400} = 0,033$.

Pravděpodobnost selhání disku je číslo blízké číslu 0,033.

Př. 8: Z 65351 nově prodaných osobních automobilů stejné značky a typu mělo během dvou let poruchu, která vyžadovala servisní zásah, 3986 vozů. Urči pravděpodobnost poruchy tohoto vozu během prvních dvou let používání.

Relativní četnost poruchy vozu: $\frac{3986}{65351} = 0,061$.

Pravděpodobnost poruchy vozu v prvních dvou letech od nákupu je číslo blízké číslu 0,061.

Př. 9: Urči pravděpodobnost:

- a) Ve dvou hodech padne dvakrát líc.
- b) Ve třech hodech padne třikrát rub.

a) Ve dvou hodech padne dvakrát líc.

Dvakrát líc padne, když padne poprvé líc (pravděpodobnosti 0,5) a podruhé také líc (pravděpodobnost 0,5), padnutí líce v obou hodech znamená poloviční pravděpodobnost z poloviční pravděpodobnosti, tedy $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

b) Ve třech hodech padne třikrát rub.

Podobně jako v předchozím bodu. Pravděpodobnost tří rubů je polovina z poloviny z poloviny, tedy $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$

Shrnutí: Pravděpodobnost nějakého výsledku v žádném případě nepředpovídá výsledek konkrétního pokusu, ale určuje pouze hodnotu, ke které se blíží relativní četnosti při velkém množství pokusů.